一类非线性变型 Hammerstein 方程的解的奇异展开*

陈　杰，张永东
（中山大学科学计算与计算机应用系，广东 广州 510275）

摘　要：方程解的奇异分解对于获得方程具有物理意义的近似解意义重大。对具有对数核的弱奇性变型 Hammerstein 方程的解的特性进行了分析，获得并证明了它的解的奇异展开。

关键词：Hammerstein 方程；非线性积分方程；奇异展开
中图分类号：O241.83　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2011）01－0001－04

Singularity Expansions for the Solutions of a Class of Modified Hammerstein Equations

CHEN Jie, *ZHANG Yongdong*
(Department of Scientific Computing and Computer Application,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: It is important to obtain the singularity expansions of the solutions of the integral equations, which reflect the physical characteristic of the equations and allow us to have approximate solutions with physical significance. The singularity expansions of the solutions of the weakly singular modified Hammerstein equations with logarithm kernel are obtained.

Key words: Hammerstein equations; nonlinear integral equations; singularity expansions

考虑如下变型 Hammerstein 积分方程

$$x(s) = \psi(s, \int_E K(s,t)x(t)\mathrm{d}t + f(s)), s \in E \tag{1}$$

其中 $\psi(s,v)$，$K(s,t)$，f 都是已知函数，$x(s)$ 是需要求解的未知函数。$\psi(s,v)$ 对 v 是非线性的，$E \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个紧集，其中 $d \geqslant 1$。根据文献［1］可知，方程（1）与下面的方程等价

$$z(s) = \int_E K(s,t)\psi(t,z(t))\mathrm{d}t + f(s), s \in E \tag{2}$$

其中 $z(s)$ 和 $x(s)$ 的关系满足下式

$$z(s) = \int_E K(s,t)x(t)\mathrm{d}t + f(s),$$
$$x(s) = \psi(s,z(s))$$

Hammerstein 方程是一类典型的非线性积分方程，同时它也是某些非线性椭圆边值问题的积分形式的表述，刻画了许多数学物理问题。对于线性弱奇性积分方程解的性质和奇异展开已有许多结果[2-4]。文献［5－8］对方程（1）和（2）以及相关的非线性积分方程进行了研究。其中，文献［7］是对具有对数核的方程（2）的解的性质进行了理论分析。对变型方程（1）用配置法进行数值求解时，所需计算的数值积分比对方程（2）求解要少的多[1]。若对方程（1）解的性质进行某种分析，将有利于对该方程进行数值求解。在本文中，我们将对具有对数核的方程（1）的解的性质进行理论分析，并由此得到解的奇异展开。方程解的奇异展开反映了方程本身的物理特性，也是文献［7，9－10］中所提出的保奇性数值方法的理论基础。这些保奇

* 收稿日期：2010－03－10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10771224）；国家自然科学基金青年基金资助项目（10601070）；中山大学 985 项目专项基金资助项目；广东省计算科学创新团队资助项目
作者简介：陈杰（1982 年生），男，博士生；通讯作者：张永东；E-mail：lnszyd@mail.sysu.edu.cn

性数值方法能够充分利用解的奇异分解，使数值解能够保持方程解本身的物理特性，并且在解不光滑时也能获得最优收敛阶。因此，方程（1）解的奇异展开对于其数值求解是很重要的，也具有广阔的应用前景。

1 作用在含对数核的弱奇性积分算子上的非线性算子的奇性展开

在这一节将考虑作用在具有对数核的弱奇性积分算子上的非线性算子的奇异展开。在此基础上，最终可以得到一类非线性变型 Hammerstein 积分方程解的奇异展开。

用 X 表示 Banach 空间 $L^2(E)$ 或 $L^\infty(E)$，并且对具有对数弱奇性核的积分算子 $\kappa:X\to X$ 定义如下

$$(\kappa x)(s):=\int_E \log|s-t|\, m(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t \quad (3)$$

其中 $m(s,t)$ 是一个充分光滑的函数，满足如下的假设条件

$$m\in C^{2n}(E\times E), n\geqslant 1;\quad m\in C^1(E\times E), n=0 \quad (4)$$

记号 H^n 表示通常定义的 Sobolev 空间，$H^n(E)=\{w: w^{(n)}\in L^2(E)\}$，其上的范数为

$$\|w\|_{H^n}=\left(\sum_{i=0}^{n}\|w^{(i)}\|_2^2\right)^{1/2}$$

其中 $w^{(i)}$ 为 w 的第 i 阶广义导数。

假定函数 $\psi(s,v)$ 满足

$$\psi\in C^{2n+2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \quad (5)$$

并定义非线性算子 $\Psi: X\to X$ 为

$$(\Psi x)(s):=\psi(s,x(s)) \quad (6)$$

利用上述记号，方程（1）可以写作如下的算子形式

$$x=\Psi(\kappa x+f) \quad (7)$$

在本文中我们始终假定函数 $f(s)$ 满足

$$f\in V\oplus H^n \quad (8)$$

其中 V 空间将在下面给出定义。

接下来，将讨论相应于变型 Hammerstein 方程（1）的作用在具有对数核的弱奇性积分算子上的非线性算子 Ψ（也可以看作 $\Psi\kappa$）的奇异展开。我们仅考虑1维的情形。不失一般性，假设区间 $E:=[0,1]$。

定义如下的在区间 $[0,1]$ 上由奇性函数组成的有限维奇性空间

$$V=V_n:=\mathrm{span}\{s^i\log^j s,(1-s)^i\log^j(1-s);\ i,j=1,2,\cdots,n\}$$

下面将证明非线性算子 Ψ 将含上面奇性函数的空间映射的像空间也包含相应的奇性函数。为方便起见，首先引入文献［9］中的引理4.4（2）。

引理1 对某些整数 $p,q\geqslant 1$，设 $u_1(s)=s^p\log^q s, u_2(s)=(1-s)^p\log^q(1-s), f\in H^{n-1}$。若 $m\in C^{n+1}([0,1]\times[0,1])$，那么

$$(\kappa f)(s)=\sum_{j=1}^{n-1}[c_j s^j\log s+d_j(1-s)^j\log(1-s)]+h_n(s),$$

$$(\kappa u_1)(s)=\sum_{j=p+1}^{n-1}\sum_{i=1}^{q+1}c_{ij}s^j(\log s)^i+\sum_{j=q+1}^{n-1}d_j(1-s)^j\log(1-s)+h_n(s),$$

$$(\kappa u_2)(s)=\sum_{j=p+1}^{n-1}\sum_{i=1}^{q+1}c_{ij}(1-s)^j(\log(1-s))^i+\sum_{j=q+1}^{n-1}d_j s^j\log s+h_n(s)$$

其中 $h_n(s)\in H^n$（可能在以上不同的地方是不相同的）。

引理2 对某些整数 $p,q,r,l\geqslant 1$，若 $u_1(s)=s^p\log^q s, u_2(s)=(1-s)^r\log^l(1-s)$，那么可以得到 $u_1u_2\in V\oplus H^{n+1}$。

证明 分别对 u_1 在点 $s=1$ 和 u_2 在点 $s=0$ 展开到第 n 次，即

$$u_1(s)=\sum_{i=0}^{n}b_i(1-s)^i+f_1(s)\equiv P_1(s)+f_1(s);$$

$$u_2(s)=\sum_{i=0}^{n}a_i s^i+f_2(s)\equiv P_2(s)+f_2(s)$$

其中当 s 在点1附近时，$f_1^{(k)}(s)=o((1-s)^{n+1-k})$，且 f_1 在点 $s=1$ 处是解析的，当 $s\to 0^+$ 时，$f_1^{(k)}\approx u_1^{(k)}(s)-P_1^{(k)}(0)$；当 s 在点0附近时，$f_2^{(k)}(s)=o(s^{n+1-k})$，且 f_2 在点 $s=0$ 处是解析的，当 $s\to 1^-$ 时，$f_2^{(k)}\approx u_2^{(k)}(s)-P_1^{(k)}(1)$。

由以上展开可以得到，$u_1u_2=P_1P_2+P_1f_2+P_2f_1+f_1f_2$。显然地，因为 P_1,P_2 是多项式，所以 $P_1P_2\in H^{n+1}$。对于 f_1f_2，有

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}s^{n+1}}(f_1(s)f_2(s))=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}f_1^{(i)}(s)f_2^{(n+1-i)}(s)$$

对于每一项 $f_1^{(i)}(s)f_2^{(n+1-i)}(s)$，$i=0,1,\cdots,n+1$，当 $s\to 0^+$ 时，它都满足

$$f_1^{(i)}(s)f_2^{(n+1-i)}(s)=o(f_1^{(i)}(s)s^i)=o([u_1^{(i)}(s)-P_1^{(i)}(0)]s^i)\to 0$$

类似地，当 $s\to 1^-$ 时，$f_1^{(i)}(s)f_2^{(n+1-i)}(s)\to 0$。因此有

$$f_1(s)f_2(s)\in C^{n+1}\subseteq H^{n+1}$$

对于 $f_1(s)P_2(s)$，有

$$f_1(s)P_2(s)=(u_1(s)-P_1(s))P_2(s)=$$

$$u_1(s)P_2(s) - P_1(s)P_2(s)$$

又因为 P_2 是多项式，$u_1 \in V$，根据文献［2，9－11］易知，$u_1P_2 \in V \oplus H^{n+1}$。因此，$f_1P_2 \in V \oplus H^{n+1}$。同理，对于 f_2P_1，仍有 $f_2P_1 \in V \oplus H^{n}$。证毕。

引理 3　一个属于 H^n 中的函数 h 与另一个属于 V 的函数 v 的乘积 hv 属于空间 $V \oplus H^n$。

该引理的证明可以参见文献［7］中的引理 2.3。接下来将证明本节的重要定理。

定理 1　算子 Ψ 是从空间 $V \oplus H^{n+1}$ 映射到空间 $V \oplus H^{n+1}$。进一步，算子 $\Psi\kappa$ 是从空间 $V \oplus H^n$ 映射到空间 $V \oplus H^{n+1}$。

证明　首先证明算子 Ψ 是从空间 $V \oplus H^{n+1}$ 映射到空间 $V \oplus H^{n+1}$。记 x 为 $x = v + h$，$v \in V$，$h \in H^{n+1}$。在 $\psi(s,y)$ 中关于第二个分量运用 Taylor 定理得

$$\psi(s,y) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\psi^{(0,k)}(s,a)(y-a)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^y (y-\sigma)^{n+1}\psi^{(0,n+2)}(s,\sigma)\mathrm{d}\sigma \quad (9)$$

令 $y = x(s)$，$a = h(s)$，则又可以得到

$$\Psi x(s) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\psi^{(0,k)}(s,h(s))v(s)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int_{h(s)}^{x(s)} (x(s)-\sigma)^{n+1}\psi^{(0,n+2)}(s,\sigma)\mathrm{d}\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}A_k(s) + \frac{1}{(n+1)!}B(s) \quad (10)$$

另外，易知 $\psi^{(0,k)}(s,h(s)) \in H^{n+1}$，$k = 0,1,\cdots,n+1$，并且把 $v(s)^k$ 按多项式展开知 $v(s)^k$ 可以看作是属于 V 中的项与 $as^p\log^q s(1-s)^r\log^u(1-s)$ 这样的项之和，这里 $p,q,r,u \geqslant 1$ 是整数，常数 a 与 p,q,r 和 u 有关。又因为 $\psi^{(0,k)}(s,h(s)) \in H^{n+1}$ 及 $v(s)^k \in V \oplus H^{n+1}$，$k = 0,1,\cdots,n+1$，那么根据引理 3 可以推出

$$A_k(s) = \psi^{(0,k)}(s,h(s))v(s)^k \in V \oplus H^{n+1} \quad (11)$$

对于 $B(s)$，根据本节引理 2 的结论，我们可以直接运用文献［7］中引理 2.4 里的证明过程就可以得到

$$B(s) \in V \oplus H^{n+1} \quad (12)$$

从而，由式子（10），（11）和（12）可以得到所需结论。

下面证明算子 $\Psi\kappa$ 是从空间 $V \oplus H^n$ 映射到空间 $V \oplus H^{n+1}$。

令 $x' = v' + h'$，$v' \in v'$，$h' \in H^n$。因为 $\kappa x' = \kappa v' + \kappa h'$，根据引理 1 易知，$\kappa x' \in V \oplus H^{n+1}$。令 $x = \kappa x'$，则由上面算子 Ψ 的结果可得结论。证毕。

2　解的奇性展开

在这一节将考虑具有对数核的弱奇性变型 Hammerstein 方程（1）的解的奇异展开。利用前面的结果，进一步得到下面的解的奇异展开定理。

定理 2　假设条件（4），（5）和（8）成立，并且 x 是方程（1）的孤立解。则存在常数 a_{ij} 和 $b_{ij}, i,j = 1,2,\cdots,n$，以及函数 $h_n \in H^n$ 使得

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}s^i\log^j s + b_{ij}(1-s)^i\log^j(1-s)] + h_n(s) \quad (13)$$

证明　当 $n = 0$ 时，直接根据定理 1 即可得到所需结论。假设对 $n = k$ 时（13）式成立，即 $x = v_k + h_k$，其中 $h_k \in H^k$，$v_k = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}[a_{ij}s^i\log^j s + b_{ij}(1-s)^i\log^j(1-s)]$。现在考虑 $n = k+1$ 的情况，假设 $f \in V_{k+1} \oplus H^{k+1}$。因为 $x = v_k + h_k$，可以得到

$$x = \Psi(\kappa x + f) = \Psi(\kappa(v_k + h_k) + f) = \Psi(v_{k+1} + h_{k+1}) \in V_{k+1} \oplus H^{k+1}$$

证毕。

根据这个定理，我们知道非线性变型 Hammerstein 方程（1）的解可以分解为奇异部分和光滑部分的直和，从而在数值求解过程中可以充分利用这个特性，在逼近空间中加上 V 中的奇异基底，可以构造更好地逼近方程真解的保奇性数值算法。关于保奇性算法请参见文献［9－10］。

参考文献：

［1］ KUMAR S, SLOAN I H. A new collocation-type method for Hammerstein equations［J］. Math Comp, 1987, 48: 585－593.
［2］ GRAHAM I G. Singularity expansions for the solutions of second kind Fredholm integral equations with weakly singular convolution kernels［J］. J Integral Equations, 1982, 4: 1－30.
［3］ SCHNEIDER C. Regularity of the solution to a class of weakly singularity Fredholm integral equations of the second kind［J］. Integral Equations Operator Theory, 1979, 2: 62－68.
［4］ VAINIKKO G, PEDAS A. The properties of solutions of weakly singular integral equations［J］. J Austral Math Soc Ser B, 1981, 22: 419－430.
［5］ ATKINSON K, HAN W. Theoretical numerical analysis［M］. New York: Springer Science + Business Media, 2009.

（下转第 8 页）

$$\frac{1+B}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{7}{2})}+\frac{\frac{1}{2}A(1-C)d_1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}+$$

$$\frac{Bd_2}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{7}{2})}=\frac{8}{5\sqrt{\pi}}$$

显然 $|f(t,u)|\leqslant \frac{tu^2}{4}$。取 $p(t)=t$，$\varphi(|u|)=\frac{1}{4}|u|^2$，则当 $0<r<\frac{20\sqrt{\pi}}{8}$ 时，都有 $p_0\varphi(r)\leqslant r$ 成立。由定理2得系统（8）在 $U=\{u(t)\in X\mid \|u\|\leqslant r<\frac{20\sqrt{\pi}}{8},t\in[0,1]\}$ 中至少有一个解。

参考文献：

[1] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.

[2] SAMKO S G, KILBAS A A, MARICHEV O I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications [M]. Yverdon, Switzerland: Gordon and Breach Science Publisher, 1993: 36 - 37.

[3] KILBAS A A, MARZAN S. Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions [J]. Differ Eqn, 2005, 1141: 84 - 89.

[4] WANG J H, XIANG H J, LIU Z G. Positive solution to non-zero boundary values problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations [J]. International Journal of Differential Equations, 2010: 1 - 12.

[5] SALEM HUSSEIN A H. On the fractional order m - point boundary value problem in reflexive Banach spaces and weak topologies [J]. J Comput Appl Math, 2009, 224 (2): 565 - 572.

[6] ZHONG W Y, LIN W. Nonlocal and multiple-point boundary value problem for fractional differential equations [J]. Comput Math Appl, 2010, 59(3): 1345 - 1351.

[7] CHENG Y, ZHU G G. Existence of fractional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2005, 310: 26 - 29.

[8] ZHANG S Q. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations [J]. Electron J Diff Eqn, 2006, 36: 1 - 12.

[9] BENCHOHRA M, HAMANI S, NTOUYAS S K. Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(7/8): 2391 - 2396.

[10] WANG J H, XIANG H J, LIU Z G. Positive solution for three-point boundary value problems of nonlinear fractional differential equation with p -Laplacian [J]. Far East Journal of Applied Mathematics, 2009, 37 (1): 33 - 47.

[11] LIANG S, ZHANG J. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(11): 5545 - 5550.

[12] BAI Z, LU H. Positive solutions for boundary value problem of nonliner fractional differential equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 311(2): 495 - 505.

（上接第3页）

[6] KANEKO H, NOREN R D, XU Y. Regularity of the solution of Hammerstein equations with weakly singular kernel [J]. Integral Equations and Operator Theory, 1990, 13: 660 - 670.

[7] KANEKO H, NOREN R D, PADILLA P A. Singularity preserving Galerkin method for Hammerstein equations with logarithmic kernel [J]. Adv Comput Math, 1998, 9: 363 - 376.

[8] LI F, LI Y, LI Z. Existence of solutions to nonlinear Hammerstein integral equations and applications [J]. J Math Anal Appl, 2006, 323: 209 - 227.

[9] CAO Y, XU Y. Singularity preserving Galerkin methods for weakly singular Fredholm integral equations [J]. J Integral Equations Appl, 1994, 6: 303 - 333.

[10] ZHANG Y, CHEN Z. Singularity preserving Petrov-Galerkin methods for weakly singular integral equations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2001, 40: 9 - 12.

[11] HUGHES T J R, AKIN J E. Techniques for developing special finite element shape functions with particular reference to singularities [J]. Int J Numer Meth engng, 1980, 15: 733 - 751.